

4. PUNKTI JA SIRGE PROJEKTSIOONID

4.1. Monge'i meetod. Punkti kaksvaade

Monge'i meetod seisneb järgmises. Objektist tuletatakse kaks ristprojektsiooni ekraanidel, mis on teineteisega risti. Seejärel pööratakse ekraanid koos kujutistega joonise tasapinnale. Saame objekti **kaksvaade**. Sageli on vaja veel täiendavaid vaateid (ristprojektsioone) või lõikeid ja projekteerida neid teistele tasapindadele ja pöörata joonise tasapinnale. Niiviisi saadud joonist, mis koosneb mitmest omavahel seotud ristprojektsioonist, nimetatakse **mituvaateks**.

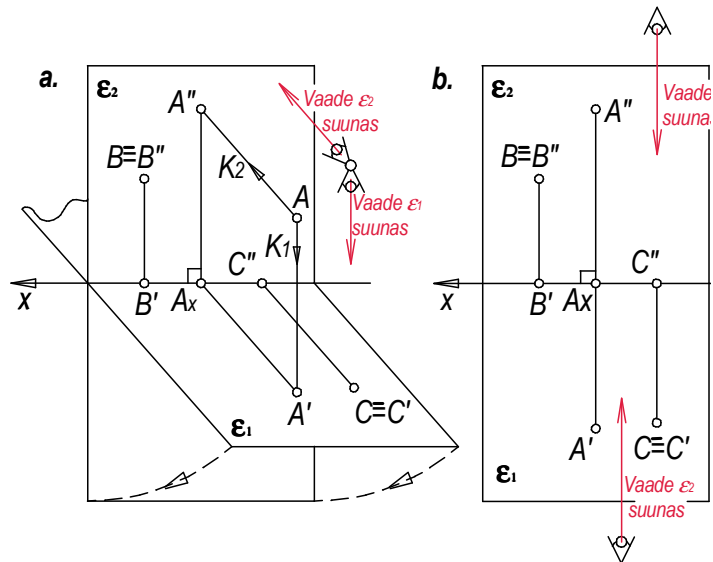
Meetod sai nime kuulsalt prantsuse matemaatiku ja suure geomeetria spetsialisti, inseneri, ühiskonna- ja riigitegelase Gaspard Monge järgi, kes elas aastatel 1746–1818. Gaspard Monge andis oma raamatus „Géométrie descriptive“ (1799) kokkukuuluvate ristprojektsioonide meetodi ja rajas sellele kogu kujutava geomeetria teooria.

4.1.1. Punkti kaksvaade

Meil on kaks teineteisega ristuvat ekraani ε_1 ja ε_2 ; kusjuures $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (vt jn 21).

Siin joonisel:

- ε_1 horisontaalne – **põhiekraan**;
- ε_2 vertikaalne – **esiekraan**;
- ekraanide lõikesirge – **x-telg**;
- projekteerivad kiired: **K_1 – põhikiir ($K_1 \perp \varepsilon_1$), K_2 – esikiir ($K_2 \perp \varepsilon_2$)**;
- punkti A ristprojektsioon põhiekraanil – **A'** (s.o **p A põhiprojektsioon**, tema pealtvaade e



Joonis 21. Punkti kaksvaade: a – punktid ruuminurgas ja nende projektsioonid teineteisega ristuvatele ekraanidele; b – samade punktide joonis (kaksvaade)

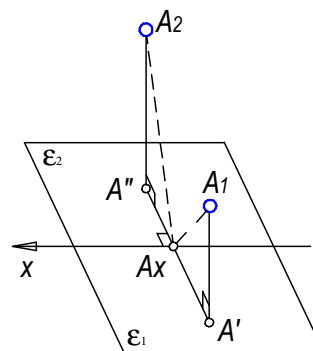
horisontaalprojektsioon);

- punkti A ristprojektsioon esiekraanil – **A''** (s.o **p A esiprojektsioon**, tema eestvaade e frontaalprojektsioon);
- sirge $A'A''$ – p A projektsioone ühendav **sidejoon**, mis on alati risti x-teljega ($A'A'' \perp x$ -telg);
- x-telg – **kaksvaate telg**.

Pöörates põhiekraani (ε_1) esiekraani (ε_2) tasapinnale, s.o joonise tasapinnale, saame p A joonise (2 vaadet), mis koosneb p A kahest teineteisega seotud vaatest A' ja A'' ja mida nimetatakse **punkti A kaksvaateks**.

Kaksvaate omadused

1. Sidejoon $A'A'' \perp x$.
2. Punkti A kaugus põhiekraanist – seda mõõdetakse eestvaatel punkti A projektsiooni (A'') kaugusega x-teljest $A''A_x = AA'$. Punkti A kaugus esiekraanist – seda mõõdetakse pealtvaatel punkti A projektsiooni (A') kaugusega x-teljest $A'A_x = AA''$.
3. Kui punkt on esiekraanil (nagu p B), siis tema esiprojektsioon $B'' \equiv B$ [p B eestvaade (B'') langeb kokku p B enesega ruumis], punkti B pealtvaade (B'), aga on x-teljel. Põhiekraanil oleva punkti puhul aga (nagu p C) p C pealtvaade $C' \equiv C$, eestvaade (C'') aga on x-teljel.
4. Joonise pinda võib aga soovi kohaselt tõlgendada kas põhi- või esiekraanina (vt jn 22).



Joonis 22. Punkti asukoht ruumis tema kaksvaate järgi.

14. Punkti kaksvaade määrab punkti asukoha ristuvate ekraanide suhtes üheselt, joonise pinna suhtes aga kaheselt (vt jn 22).

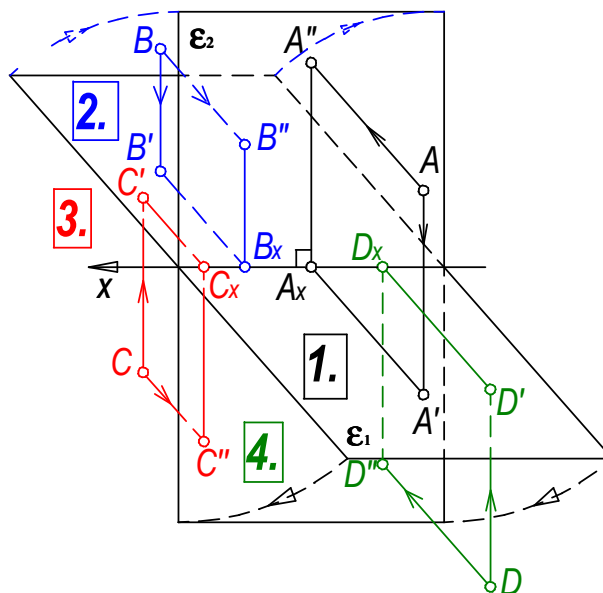
Kui joonise pinnaks võtta põhiekraan, näeksimme punkti A asukohaga A_1 , kui aga joonise pinnaks võtta esiekraan, näeksimme sama punkti asukohaga A_2 . Punkt asub seega jooniste erivariantide järgi kahel kohal A_1 ja A_2 . Tegelikult, kui murrame joonise pinna kokku ruumi nurgaks, saame esialgse tulemuse – mõlemad punktid, nii A_1 kui A_2 , langevad kokku punktis A, st, ruumis $A_1 \equiv A_2 \equiv A$.

4.1.2. Punkti asukoht ruumiveerandite järgi

Ristuvad tasapinnad ε_1 ja ε_2 jagavad ruumi neljaks ruumiveerandiks (vt jn 23):

- I – ekraani ees ja põhiekraanist üleval pool;
- II – esiekraani taga ja põhiekraanist üleval pool;
- III – esiekraani taga ja põhiekraanist allpool;
- IV – esiekraani ees ja põhiekraanist allpool.

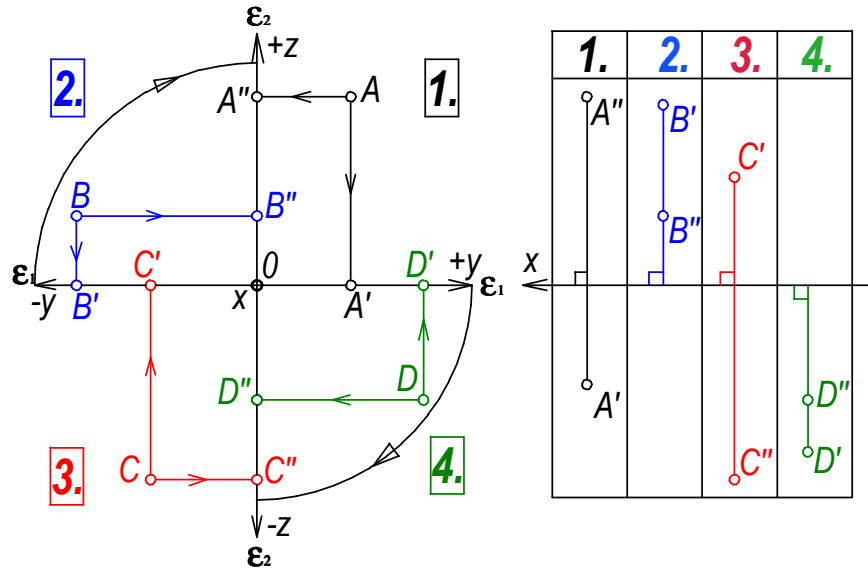
Kui joonise pinnaks võtame esiekraani ε_2 , siis pöörates ekraani ε_1 joonise pinnale, saame punktide kaksvaated, nii nagu on näidatud joonisel 24.



Joonis 23. Ristuvad tasapinnad jagavad ruumi neljaks ruumiveerandiks

Kui punkti kaksvaated langevad kokku, siis punkt asub tasapinnal ξ , mis poolitab II ja IV veerandit (vt jn 25).

Tabelis 1 on toodud punktide koordinaatide märgid, kui punktid asuvad erinevates ruumiveerandites. Punktide asukohad ruumiveerandites vastavad joonistele 23 ja 24.



Joonis 24. Punkti asukoht ruumiveerandite järgi joonisel (kaksvaatel) ja joonise saamine

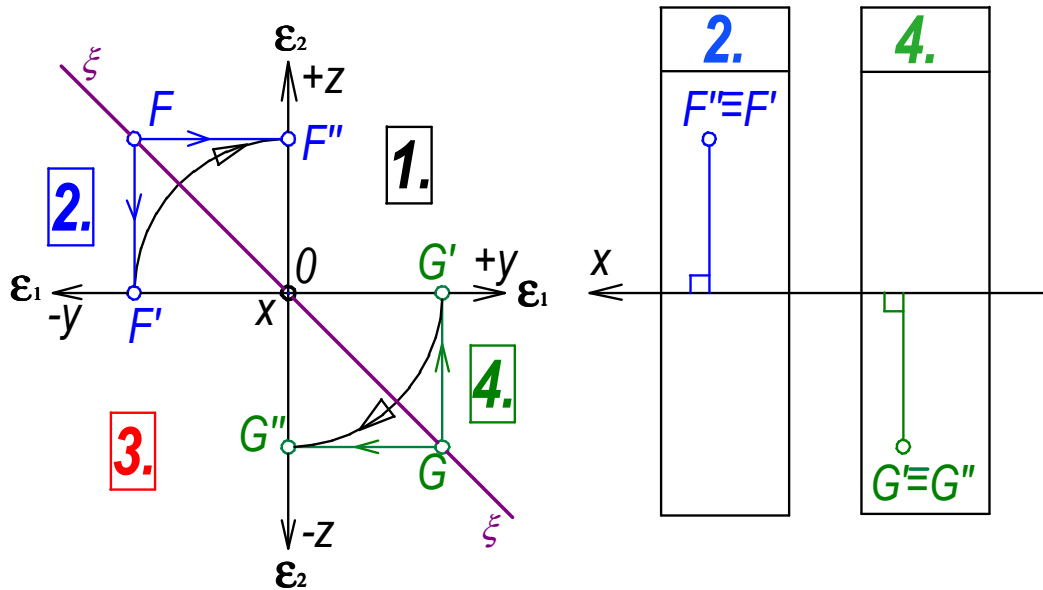
Punktide koordinaatide märgid vastavates ruumiveerandites

Tabel 1.

Punkt	Punkti asukoht ruumiveerandis	x	y	z
A	I	+	+	+
B	II	+	-	+
C	III	+	-	-
D	IV	+	+	-

Siin on punkti A kõik koordinaadid positiivsed, kuna punkti koordinaatlõigud vastavatel telgedel langevad kokku telgede positiivse suunaga (vastasel juhul oleks koordinaadid negatiivsed).

Koordinaat x määrab punkti A kauguse külgekraanist e_3 (punkti A laiuse koordinaat), seda mõõdetakse mööda x -telge või paralleelselt x -teljega. Koordinaat y määrab punkti A kauguse esiekraanist e_2 (punkti A sügavuse koordinaat), seda mõõdetakse mööda y -telge või paralleelselt y -teljega. Koordinaat z määrab punkti A kauguse põhiekraanist e_1 (punkti A kõrguse koordinaat), seda mõõdetakse mööda z -telge või paralleelselt z -teljega.



Joonis 25. Punkti asukoht ruumiveerandites, kui punkti kaksvaated langevad kokku

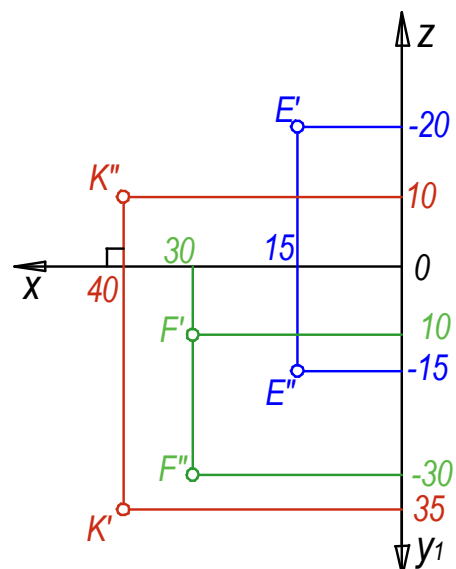
Näide punkti koordinaatide märkimise kohta: A(20; 15; 35), st punkti A koordinaatide väärtused on järgmised $x = 20$ mm, $y = 15$ mm ja $z = 35$ mm.

Joonisel 26 on toodud näide punktide K(40; 35; 10); E(15; -20; -15) ja F(30; 10; -30) kaksvaate joonestamiseks, kus punktid on vastavalt I, III ja IV ruumiveerandis.

4.2. Punkti kolmvaade (e üldasendiline punkt)

Punkti kaksvaade määrab punkti asukohta ekraanide suhtes üheselt. Keerukama objekti puhul peaks neid punkte olema väga palju ja punktide tähiseid samuti väga palju. Joonis läheb liiga kirjuks ja isegi segaseks. Seetõttu on tehnilises joonestamises üldse loobutud punktide tähistamisest. Kuid kui punktid on tähistamata, siis ei määra kaksvaade tihti enam objekti üheselt.

Näiteks vaatame kaksvaadet, mis on näidatud joonisel 27 a. Sellise kaksvaate võivad anda erinevad objektid. Joonisel 27 annavad samasuguse kaksvaate nii detailid 27 b, c kui ka d.



Joonis 26. Näide punktide kaksvaadete konstrueerimiseks nende koordinaatide järgi

Kui kaksvaade ei määra objekti üheselt, siis võetakse kasutusele lisaristprojektsioonid lisaekraanidele. Esimene täiendav ekraan võetakse risti x -teljega. Ta on risti nii põhi- kui esiekraaniga ja tähistatakse ε_3 ning nimetatakse **külgekraaniks**. Külgekraan lõikab nii põhi- kui esiekraani vastavalt mööda telgesid y ja z .

Objekti ristprojektsioon külgekraanil – s.o **objekti vasakvaade e. külgsaade**. Punktist A saame siis projektsioonid ekraanidel ε_1 , ε_2 ja ε_3 : pealtvaate A' , eestvaate A'' ja külgsaate A''' (vt jn 28). Punkti A kaugus külgekraanist on AA''' . Ekraanide lõikesirged võetakse ristkoordinaadistiku teljestikuks $Oxyz$.

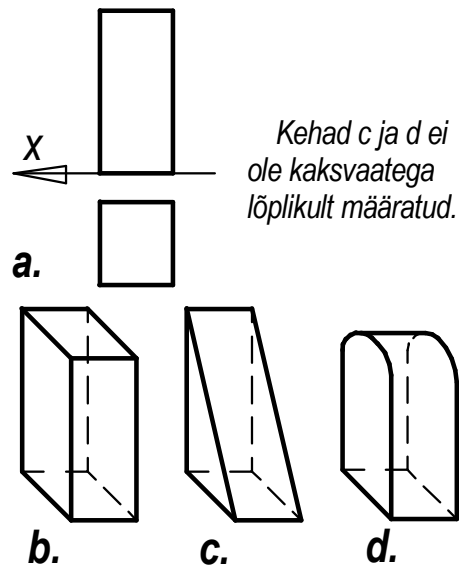
Ekraanid on **koordinaatpinnad** (vt jn 28):

- põhiekraan $\varepsilon_1 \equiv xy$ (xy -koordinaatpind);
- esiekraan $\varepsilon_2 \equiv xz$ (xz -koordinaatpind);
- külgekraan $\varepsilon_3 \equiv yz$ (yz -koordinaatpind).

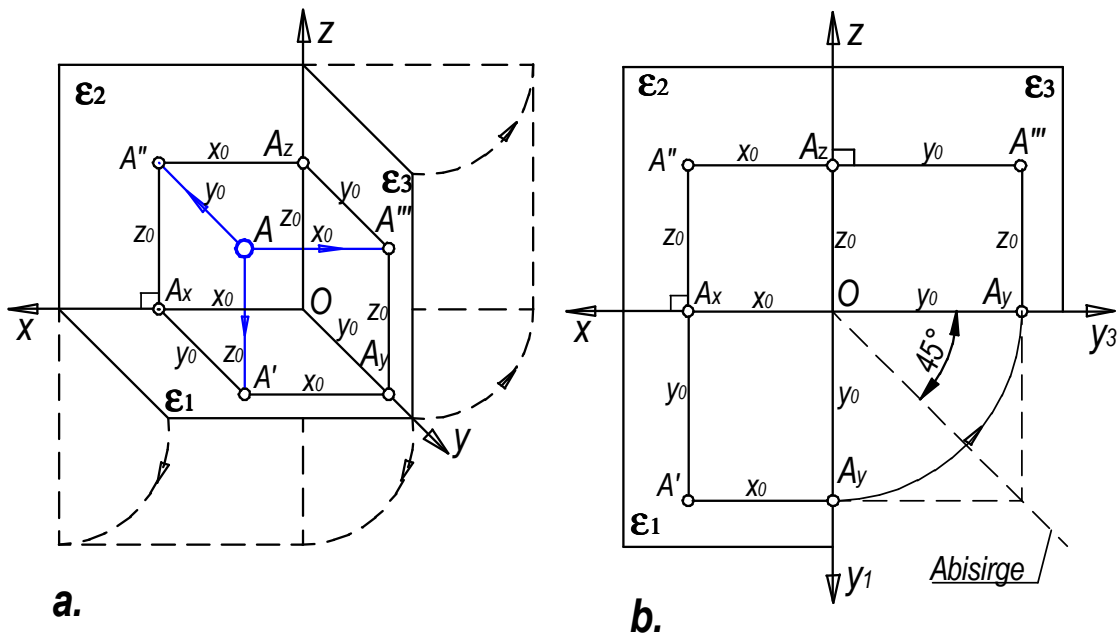
Punkti A kaugused ekraanidest on:

- $x_0 = OA_x = A'''A$ – s.o p A **kaugus külgekraanist e p A külgsaade**;
- $y_0 = OA_y = AA''$ – s.o p A **kaugus esiekraanist e p A esiksaade**;
- $z_0 = OA_z = A'A$ – s.o p A **kaugus põhiekraanist e p A põhiksaade**.

Need on punkti A **koordinaadid**. Kirjutatakse näiteks nii $A(2; 5; 3)$, kui $x = 2$; $y = 5$ ja $z = 3$. Saadud joonist, mis koosneb punkti A kolmest omavahel seotud ristprojektsioonist, nimetatakse punkti A **kolmvaateks**.



Joonis 27. Kaksvaatega määramata detailide variante



Joonis 28. Punkti A kolmvaade: a – punkt A ruuminurgas ja tema projektsioonid teineteisega ristuvatele ekraanidele; b – sama punkti A joonis (kolmvaade), kus põhi- ja külgekraan on pööratud esiekraani tasandile

Pöörates ekraanid joonise tasapinda, saame punkti kolmvaate (vt jn 28 b).

Siin joonisel: – $A'A'' \perp x$ on püstsidejoon;
 – $A''A''' \perp z$ rõhtsidejoon.

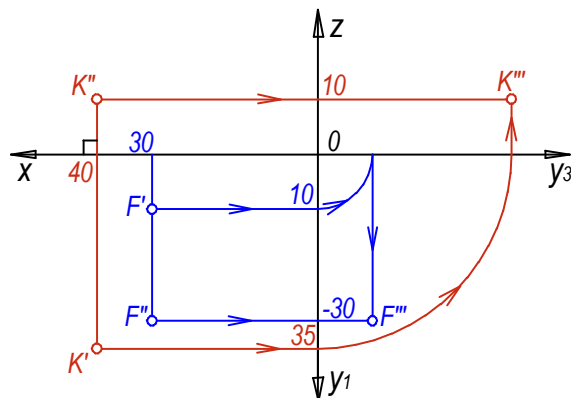
Kaugused $A_z A''' = A_x A'' = y_0$ – s.o **kolmvaate peomadus** – s.o ühtlasi ka p A **y-koordinaat**.
 Koordinaatlõigud x_0 ja z_0 on: $OA_x = A_z A'' = x_0$ – s.o p A **x-koordinaat**;
 $OA_z = A_x A' = z_0$ – s.o p A **z-koordinaat**.

Punkti kaks projektsiooni kolmvaatel määravad ära üheselt ka kolmanda projektsiooni. Siin on nagu 2 kaksvaadet: 1) eestvaade pealtvaatega;

2) eestvaade külgvaatega.

Punkti projektsioonid võib anda ka koordinaatide järgi ja need projektsioonid võivad asetseada ükskõik millises veerandis I, II, III või IV.

Näitena vaatame joonisel 29 toodud punktide K(40; 35; 10) ja F(30; 10; -30) kolmvaateid (vt jn 29).



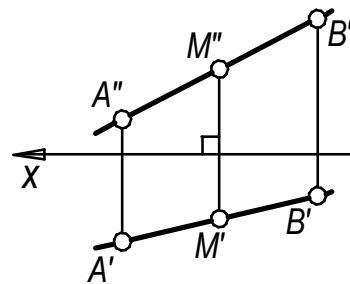
Joonis 29. Näide punktide kaksvaadete konstrueerimiseks nende koordinaatide järgi, kus punkt K on I ja punkt F on IV ruumiveerandis

4.3. Sirgjoone kaksvaade ja kolmvaade

Sirgjoon on määratud oma kahe punktiga, iga punkt aga kaksvaatega või kolmvaatega. Seega sirgjoon on määratud oma 2 punkti kaksvaatega või kolmvaatega. Järelkult sirgjoone projekteerimiseks piisab, kui on teada tema otspunktide koordinaadid.

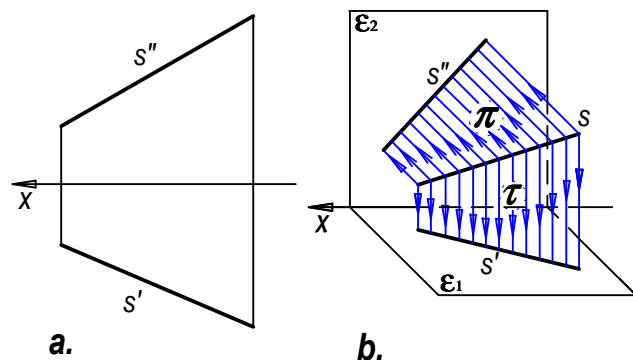
Sirgjoone projekteerimisel:

- 1) leida otspunktide ristprojektsioonid;
- 2) ühendada samanimelised punktide projektsioonid pideva jamejoonega.



Joon. 30. Sirge kaksvaade ja punkt sirgel

Kui võtta sirgel mingi punkt M , siis selle punkti projektsioonid asuvad sirge AB pealt- ja eestvaatel nii, et sidejoon $M'M''$ on risti x -teljega (vt jn 30). Üldjuhul, kui sirget AB nimetada sirgeks s , siis sirge s on määratud oma kaksvaatega, ja kui ühegi punkti projektsiooni ei ole sirgel määratud (nagu joonisel 31a), siis võime sirgel võtta vabalt mõned punktid. Nende punktide projektsioonid asuvad sidejoontel sirge s vastavatel projektsioonidel.



Joonis 31. Sirge projektsioonide saamine

Sirge s pealtvaate määrab projekteeritav tasapind τ . Eestvaate projekteeritav tasapind π ; kusjuures $\tau \perp \epsilon_1$ ja $\pi \perp \epsilon_2$; ning τ ja π lõikejoon on sirge s (vt jn 31b).

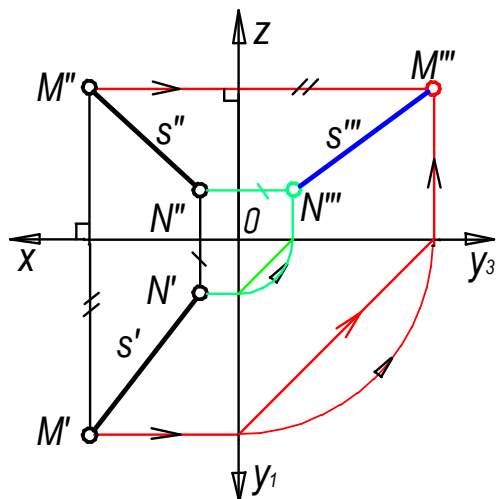
Kui meil on vaja saada kolmandat vaadet, külgvaadet sirgest s , millel on kaksvaade olemas, valime sirgel s vabalt kaks punkti M ja N ning tuletame nende punktide külgvaated kaksvaate kaudu. Siin on kaks varianti (vt jn 32):

- I variant: $M_x M' = M_z M''$ ja $N_x N' = N_z N''$ kanname rõhtsatele sidejoontele M'' ja N'' – st risti z -teljega. Saadud punktid N''' ja M''' ühendame ja saame s''' ;
- II variant: punktide M ja N kaugused esiekraanist kanname pealtvaatelt üle 45° joontega või kaartega, selleks tõmbame rõhtsad sidejooned punktide põhiprojektsioonidest M' ja N' (risti y -teljega) kuni y -teljeni.

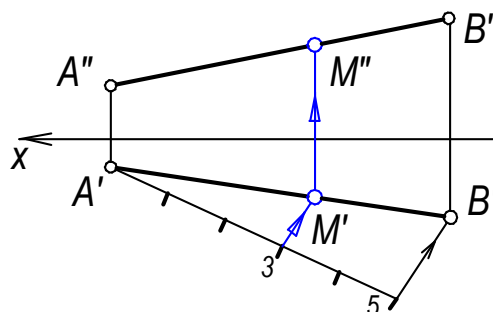
4.4. Sirglõigu jaotamine antud vahekorras

Antud teemat selgitame näite abil (vt jn 33). Jaotame sirglõigu AB vahekorras 3:2, nii et $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$. Sirglõigu jaotamiseks tõmbame ükskõik kas eestvaatel või pealtvaatel ühest sirglõigu otspunktist vabalt mingi nurga all sirge, nagu joonisel 33 on see tõmmatud pealtvaatel punktist A , ja kanname sellele 5 jaotust ühtlaste vahedega, kuna meil on vaja sirge jagada suhtes 3:2.

Seejärel ühendame sirgega viimase jaotuse punktiga B, saame sirge 5B'. Lõpuks tõmbame kolmanda jaotuse kohalt paralleelse sirge kuni sirgeni AB, saame punkti M ($3M' \parallel 5B'$). Sealt saame sidejoonega punkti M teise projektsiooni.



Joonis 33. Sirge jaotamine etteantud vahekorras



Joonis 32. Sirge kolmvaate konstrueerimine sirge kaksvaatest

5. ERIASENDILISED SIRGED

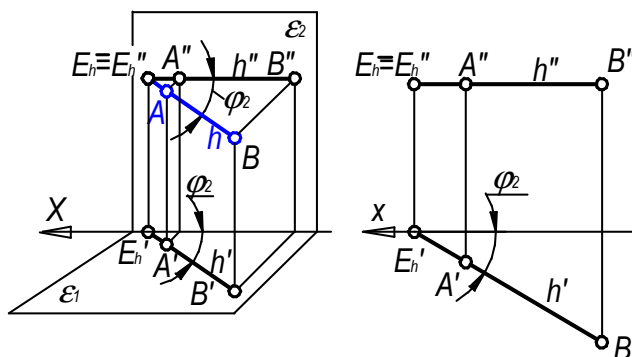
Üldasendiline sirge – s.o sirge, mis ei ole ühegi ekraaniga paralleelne ega asetse ühelgi ekraanil. **Eriasendiline sirge** – on mõne ekraaniga paralleelne või asetseb mõnel neist.

Ekraaniga paralleelseid sirgeid nimetatakse **nivoosirgeteks**. Need on:

- **horizontaal**, s.o põhiekraaniga paralleelne sirge (tähistatakse “**h**”);
- **frontaal**, s.o esiekraaniga paralleelne sirge (tähistatakse “**f**”);
- **profiilsirge**, s.o külgekraaniga paralleelne sirge (tähistatakse “**s**”).

5.1. Horizontaal h

Horizontaali eestvaade $h'' \parallel x$ -teljega, siis $A'B' = AB$ – sirglõik projekteerub põhiekraanile õiges pikkuses. Originaalsuuruses on ka esikaldenurk φ_2 (kaldenurk esiekraani suhtes, sest selle tasapind on põhiekraaniga paralleelne). Punkt E_h , s.o horizontaali esijalg, sirge h lõikepunkt esitahuga $E_h \equiv E''_h$. Põhijalg horizontaalil puudub, sest $h \parallel \varepsilon_1$. Kui $h \perp \varepsilon_2$ ja $h \parallel \varepsilon_1$, siis $E_h \equiv E''_h \equiv h''$ (horizontaal projekteerub esiekraanile punktiks).



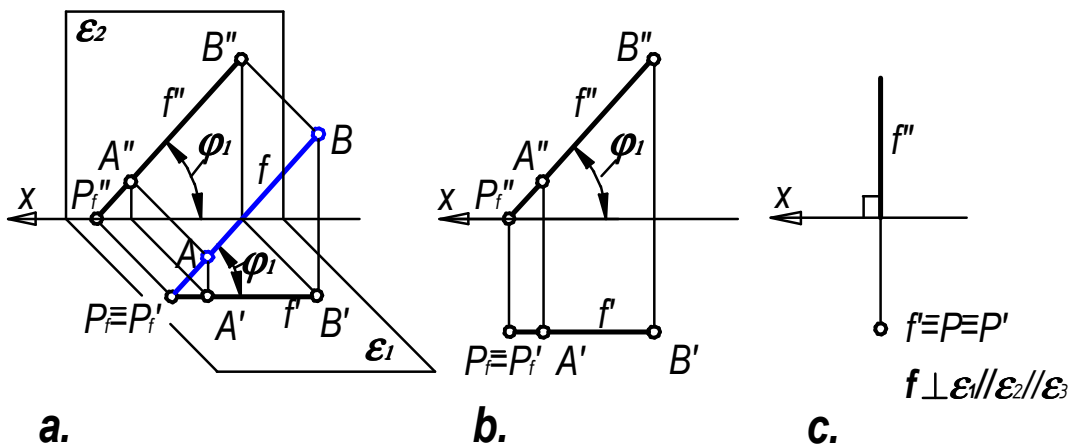
Joonis 34. Horizontaalsirge, tema projektsioonid, pikkus ja kaldenurk

5.2. Frontaal f

Frontaali pealtvaade $f'' \parallel x$ -teljega (vt jn 35). Esiokraanile projekteeruvad originaalsuuruses frontaali pikkus (siin lõik AB, milline on frontaalil $A''B'' = AB$) ja frontaali põhikaldenurk φ_1 ; põhiekraanil aga $A'B' \parallel x$ -telg. Frontaalil puudub esijalg, sest $f \parallel \varepsilon_2$, frontaali põhijäljeks on punkt $P(P'',P')$, frontaali lõikepunkt põhiekraaniga.

Kui sirge f on paralleelne esi- ja külgekraaniga ($f \equiv p$) (vt jn 35c); siis $f'' \parallel x$ -teljega ja $f \perp \varepsilon_1$, frontaalsirge f põhiprojektsioon on punkt.

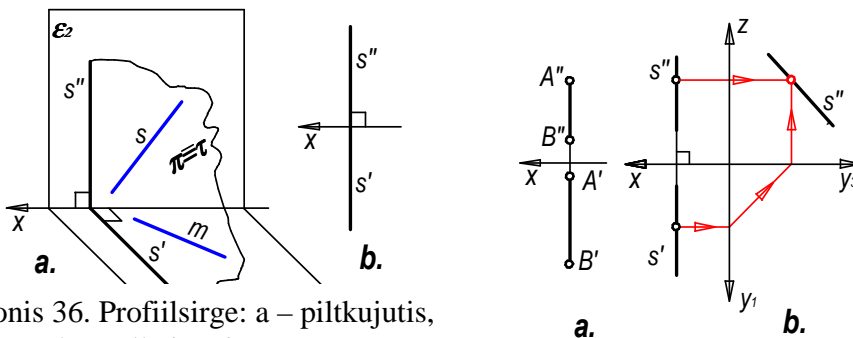
Kui sirge s on paralleelne põhi- ja esiekraaniga $s \equiv h \equiv f$; siis $f \parallel x$ -teljega ja $s \perp \varepsilon_3$, sirge s külprojektsioon on punkt.



Joonis 35. Frontaalsirge: a – frontaalsirge piltkujutis, tema projektsioonid ekraanidel, pikkus ja kaldenurk; b – sama frontaalsirge joonis; c – frontaalsirge joonis, kui $f \perp \varepsilon_1$

5.3. Profiilsirge s

Profiilsirge pealt- ja eestvaade on üldjuhul sirged ühel ja samal sidejoonel (vt jn 36). Erandjuhul võib üks projektsioonidest olla punkt. Kui sirgel ei ole punkte fikseeritud, siis kaksvaade ei määra üheselt profiilsirget, sest projekteeruvad pinnad esi- ja põhitasapinnale τ ja π langevad ühte ja külgekraanile ei teki lõikesirget (vt jn 37).



Joonis 36. Profiilsirge: a – piltkujutis, b – selle joonis

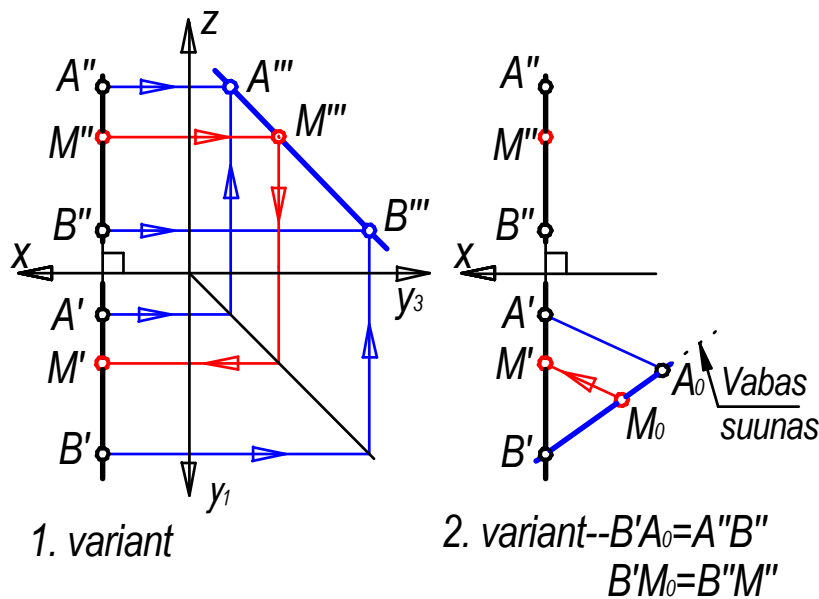
Joonis 37. Profiilsirge joonis: a – sirge on määratud kahe punktiga; b – sirge ei ole määratud punktidega

NÄIDE

Meil on sirge kaksvaade ja sellel punkti M eestvaade M'' . Leida punkti asukoht sirgel, tema pealtvaade.

Lahendusel on siin kaks varianti.

- 1. variant: tuleb leida sirge külgsuuna ja punkt M kanda sidejoontega üle sellele sirgele (vt jn 38 – 1. var.).
- 2. variant: tõmbame vabas suunas mingi nurga all $A'B'$ suhtes sirge $A_0B' = A''B''$ nii, et ta läbiks sirget $A'B'$, sinna kanname $A_0M_0 = A''M''$. Sirglõigud jagunevad nagu $A''M''/M''B''$. Tõmbame $M_0M' \parallel B_0B' \parallel A_0A'$, saame M' (vt jn 38 – 2. var.).



Joonis 38. Punkti asukoha leidmine sirgel

Kordamisküsimused

1. Monge'i meetod punkti kaksvaate saamisel, meetodi olemus?
2. Mis on punkti mituvaade?
3. Mis on sirge mituvaade?
4. Mis juhtumil sirgjoone projektsiooniks tuleb punkt?
5. Missugust joont punkti kaksvaatel nimetatakse sidejooneks?
6. Kuidas saadakse punkti kaksvaade?
7. Millist kaugust näitab y-koordinaat?
8. Millist kaugust näitab x-koordinaat?
9. Millist kaugust näitab z-koordinaat?
10. Kus asuvad punktid $A(0, 0, 0)$; $B(0, 0, 50)$; $C(0, 50, 0)$; $D(30, 0, 0)$?
11. Kus asuvad punktid $A(10, 0, 30)$; $B(0, 20, 0)$; $C(0, 50, 30)$; $D(40, 50, 40)$?
12. Kui punkt on esiekraanil, kus asub siis tema pealtvaade joonisel?
13. Kas lihtsa detaili kuju on alati tema kaksvaate järgi määratud?
14. Kas punkti kaksvaade määrab üheselt ka tema kolmanda projektsiooni?
15. Kuidas ehitada punkti antud kaksvaate järgi tema külgsprojektsioon?
16. Kuidas asetseb sirge AB, kui $A(0, 50, 30)$ ja $B(30, 50, 30)$?
17. Kus asetsevad punktid, kui $A' \equiv A$ ja $B' \equiv B''$?
18. Kui punkt asub sirgel, kus asuvad siis selle punkti projektsioonid antud sirge suhtes?
19. Kus asub punkt A, kui $A \equiv A''$, kus kohal sidejoonel on selle punkti pealtvaade?
20. Milline on eriasendiline sirge?
21. Millised on nivoosirged?
22. Milline on üldasendiline sirge?
23. Kas sirge saab olla paralleelne kahe ekraaniga? Kuidas ta on siis kolmandaga?
24. Mis juhtumil paralleelprojektsiooni korral sirglõik projekteerub oma loomulikus suuruses?

Soovitatav kirjandus

1. Riives, J., Tihase, K. 1983. Joonestamine. Tln, Valgus, 453 lk.
2. Säarak, J. 2008. Kujutav geomeetria. Õppematerjal. Tln, Tallinna Tehnikakõrgkool, 114 lk.
3. Rünk, O., Paluver, N. 1977. Kujutav geomeetria. Tln, Valgus, 276 lk.

Kodune individuaalne töö

Sirge ja punkti kolmvaate ja tema asendi kohta ruumis vormistada individuaalsete ülesannete järgi graafiline töö nr 2 formaadile A4. Töö näide on toodud failis **Ülesanne 2 NÄIDIS**.

Kodune individuaalne graafiline töö nr 2.

Töö nimetus: Sirge kolmvaade. Tähis: TJ01.00

Formaat A4.